

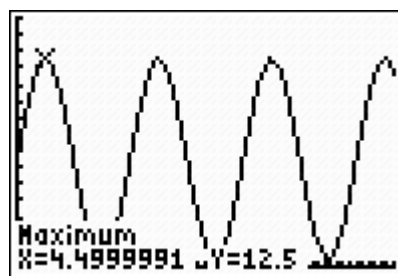
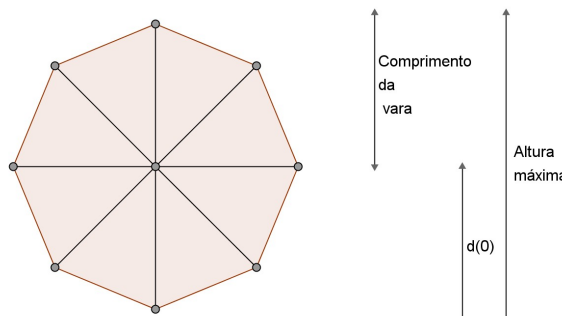
PROPOSTA DE RESOLUÇÃO, 10^o-11^o, ou 11^o-12^o, MATEMÁTICA B (PROVA 735)
 2011 - 2^a Fase

Grupo I

1 O comprimento da vara pode ser obtida pela diferença entre o máximo da função e altura inicial do ponto V, como se vê na figura.

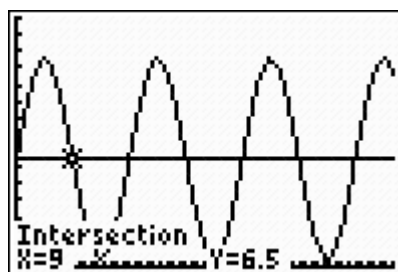
$$d(0) = 6,5 + 6\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 6,5 - 0 = 6,5$$

Para determinar o máximo da função, recorremos à representação gráfica da função no intervalo $[0,60]$ e determinamos o máximo:



Assim o comprimento da vara é dado por $12,5 - 6,5 = 6$, ou seja a vara mede 6 metros.

2 O ponto V está a 6,5 metros de altura quando se inicia o movimento, de acordo com o cálculo incluído na resposta anterior. Intersectando o gráfico da função com a recta horizontal $y=6,5$ é possível verificar que passados 9 segundos o ponto V volta a estar a uma altura de 6,5 metros, de acordo com a figura seguinte:



Assim, como a função co-seno é periódica, atinge esta altura de 9 em 9 segundos e como o

movimento dura 900 minutos, e $\frac{900}{9} = 100$ vezes, durante os 15 minutos o ponto V esteve a 6,5 metros do solo 101 vezes incluindo o instante inicial.

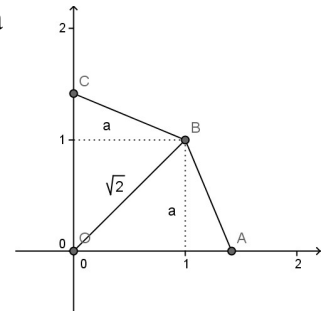
3.1 Há infinitas rotações do plano que transformam o ponto B no ponto G . Uma delas é a rotação de centro O e amplitude $\frac{360^\circ}{8} \times 5 = 225^\circ$.

3.2 Para determinar as coordenadas do ponto B , consideramos a figura ao lado:

Assim, as coordenadas são iguais, e correspondem aos comprimentos dos catetos de um triângulo retângulo isósceles, cuja hipotenusa mede $\sqrt{2}$.

$$(\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow 2 = 2a^2 \Leftrightarrow 1 = a$$

As coordenadas do ponto B são $(1,1)$, logo o ponto simétrico de B relativo ao eixo das ordenadas – o ponto D – são $(-1,1)$.



Grupo II

1 (a_n) é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo 32 dm^2 , porque cada linha de quadrados é um retângulo de base 8 dm e altura igual a metade da altura da linha anterior.

Então, a soma das primeiras sete linhas é $63,5 \text{ dm}^2$, porque:

$$S_7 = 32 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^7}{1 - (\frac{1}{2})} = 63,5$$

2 Para que a soma das áreas fosse 64 dm^2 , teríamos

$$S_n = 64$$

$$32 \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})} = 64$$

$$\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$1 - (\frac{1}{2})^n = 1$$

$$(\frac{1}{2})^n = 0$$

Esta igualdade é impossível porque uma potência de base positiva é sempre um número positivo, logo a soma das áreas não pode ser 64 dm^2 .

Grupo III

1 Analisamos todas as hipóteses possíveis no conjunto dos dois lançamentos e o respectivo produto dos números saídos na tabela seguinte:

| 1º Lanç. \ 2º Lanç. | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
|---------------------|----|----|---|----|----|----|
| -1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| -1 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | -1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Nestas condições, a distribuição de probabilidades da variável aleatória Y é dada pela tabela seguinte:

| y_i | -1 | 0 | 1 |
|--------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $P(Y = y_i)$ | $\frac{12}{36}$ | $\frac{11}{36}$ | $\frac{13}{36}$ |

2 A afirmação I é falsa porque como a distribuição normal é simétrica relativamente à média, para qualquer valor de a , $P(X < \bar{x} - a) = P(X < \bar{x} + a)$. Como a média é 170 cm,

$P(X < 170 - 10) = P(X < 170 + 10)$, ou seja é igualmente provável escolher um aluno com altura inferior a 160 cm ou superior a 180 cm, pelo que a classificação do Diogo está correcta.

A afirmação II também é falsa, porque de acordo com a justificação da falsidade da afirmação I, podemos afirmar que a $P(160 < X < 170) = P(170 < X < 180)$; como

$P(170 < X < 180) + P(X > 180) = 0,5$ porque $P(170 < X < 180) + P(X > 180) = P(X > 170)$ e $P(X > 170) = 0,5$; logo a probabilidade não é superior a 0,5 e o Diogo classificou-a como falsa correctamente.

Relativamente à afirmação III observamos que 1,84 corresponde, nesta situação, a $\bar{x} + 2 \times 7$, como $P(\bar{x} - 2 \times \sigma < X < \bar{x} + 2 \times \sigma) = 0,9545$, logo a $P(X < \bar{x} - 2 \times \sigma) + P(X > \bar{x} + 2 \times \sigma) = 0,0455$ e como

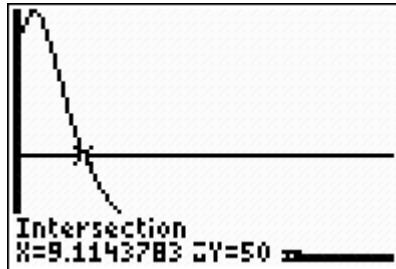
a distribuição normal é simétrica relativamente à média, $P(X > \bar{x} + 2 \times \sigma) = \frac{0,05}{2} = 0,02275$; o que corresponde a 2,275% assim podemos assumir que a valor 7 para valor aproximado do desvio padrão, classificando como verdadeira a afirmação III, de acordo com a classificação do Diogo.

Grupo IV

1.1 Começamos por determinar o valor da concentração inicial:

$$C(0) = \frac{600}{6} = 100$$

logo pretende-se determinar o instante em que a concentração era de 50 mg/m^3 , para tal recorreremos à interseção dos gráficos da função C e da recta horizontal $y=50$:



Assim foi durante o 9º ano após 1995 que a concentração ficou reduzida a metade, ou seja durante o ano de 2004.

1.2 A alteração do sinal da taxa de variação de positiva para negativa, significa, no contexto do problema, que a concentração da substância poluente deixou de aumentar (taxa de variação positiva) e passou a diminuir (taxa de variação negativa). Ou seja a concentração da substância inicialmente aumentou, no instante em causa começou a diminuir e nunca mais voltou a aumentar.

2.1 O aumento médio entre a segunda e oitava semanas, corresponde à taxa de variação média no intervalo $[2,8]$:

$$TVM_{[2,8]} = \frac{N(8) - N(2)}{8 - 2} = \frac{\frac{20 \times 8 + 2}{8 + 2} - \frac{20 \times 2 + 2}{2 + 2}}{6} = \frac{16,2 - 10,5}{6} = 0,95$$

Como a função dá o número de trutas em milhares, um aumento de 0,95 milhares corresponde a um aumento de 950 trutas.

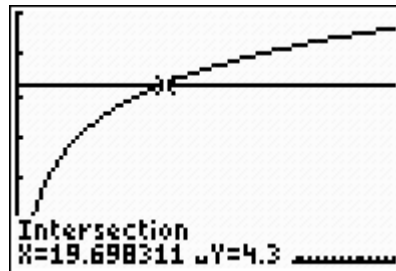
2.2 Considerando que

$$\begin{array}{r|l} 20x + 2 & x+2 \\ -20x - 40 & 20 \\ \hline & -38 \end{array}$$

$$\text{Logo } N(x) = \frac{20x + 2}{x + 2} = 20 - \frac{38}{x + 2}$$

A função que modela o número de trutas é uma função racional que tem uma assíntota horizontal $y=20$. Como a função é crescente, no seu domínio, o valor da população de trutas será sempre inferior a 20 milhares de trutas, logo o número de efectivos da população não voltará a igual a população de 22 000 que existia antes da contaminação.

3 Representando a função $D(n)$ e a recta horizontal $y=4,3$, determinamos a intersecção no ponto de coordenadas (19,698;4,3).



Como n representa o número de espécies e tem que ser um número natural, o menor natural que verifica a condição $D(n) \geq 4,3$ é 20. Desta forma o número de espécies a colocar no aquário é 20.