

Proposta de Resolução do Exame do 12º ano Matemática A (Prova 635)

2011 - 1ª Fase

Grupo I

1. Como os acontecimentos são independentes, então, a probabilidade de se verificar um acontecimento não se altera pela ocorrência, ou não, do outro, pelo que :
- $$P(B|A) = P(B)$$

Opção correcta: versão 1: D versão 2: B

2. Como só podem existir exactamente dois algarismos iguais a 7, então para as outras duas hipóteses restam 9 algarismos que se podem repetir. Existem 4C_2 formas diferentes de colocar os dois algarismos 7.

O número de códigos diferentes é dado por: ${}^4C_2 \times 9 \times 9 = 486$

Opção correcta: versão 1: A versão 2: C

3. Por definição de assíntota oblíqua tem-se que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - (2x - 4)) = 0$ ou seja

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x + 4) = 0$$

Opção correcta: versão 1: C versão 2: A

4. A função é contínua excepto para $x=5$. Fica assim excluída como hipótese de resposta a opção C em ambas as versões

$$f(0) = -8, \quad f(1) = -7 \quad f(4) = 7$$

como $f(1) \times f(4) < 0$, então f admite pelo menos um zero no intervalo $]1, 4[$

Opção correcta: versão 1: B versão 2: D

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right)}{x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 1 \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Opção correcta: versão 1: C versão 2: C

6. Estudando , por observação do gráfico de f , o sinal de $f'(0)$, $f'(6)$ e $f'(-3)$ tem-se que $f'(0)<0$, $f'(6)>0$ e $f'(-3)>0$.
A afirmação verdadeira é $f'(0) \times f'(6) < 0$.

Opção correcta: versão 1: D versão 2: A

7. $i^{4n} + i^{4n+1} + i^{4n+2} = 1 + i + (-1) = i$

O módulo de i é 1 e o argumento é $\frac{\pi}{2}$, logo o número complexo que lhe corresponde é z_2 .

Opção correcta: versão 1: B versão 2: C

8. O raio da circunferência é $\sqrt[5]{32} = 2$ e a amplitude do ângulo compreendido entre duas raízes, índice 5, consecutivas é $\frac{2\pi}{5}$.

A área do sector circular é $\frac{2^2 \times \frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{4\pi}{5}$

Opção correcta: versão 1: B versão 2: D

Grupo II

1.

1.1.

Se z_1 é raiz do polinómio então, aplicando a regra de Ruffini, vem:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & 16 & -16 \\
 1 & & 1 & 0 & 16 \\
 \hline
 & 1 & 0 & 16 & 0
 \end{array}$$

$$z^3 - z^2 + 16z - 16 = (z-1)(z^2 + 16)$$

As restantes raízes do polinómio poderão obter-se através da resolução da seguinte equação:

$$z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-16} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{16} i \Leftrightarrow z = \pm 4i$$

Na forma trigonométrica:

$$z = 4cis \frac{\pi}{2} \vee z = 4cis \frac{3\pi}{2}$$

1.2.

$$z_2 = 5i = 5cis \frac{\pi}{2}$$

$$z_2 \times z_3 = 5cis \frac{\pi}{2} \times cis \left(\frac{n\pi}{40} \right) = 5cis \left(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{40} \right) = 5cis \left(\frac{20\pi + n\pi}{40} \right)$$

Para $z_2 \times z_3$ pertencer ao terceiro quadrante e à bissectriz dos quadrantes ímpares tem que se verificar:

$$\begin{aligned} \frac{20\pi + n\pi}{40} &= \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow 20\pi + n\pi = 50\pi + 80k\pi \Leftrightarrow n\pi = 30\pi + 80k\pi \Leftrightarrow \\ n &= \frac{30\pi + 80k\pi}{\pi} \Leftrightarrow n = 30 + 80k \end{aligned}$$

Para $k = 0$, vem: $n = 30$

2.

2.1.

Seja X a variável aleatória correspondente ao número de jovens que pagam com multibanco.

$$P(X = 6) = {}^9C_6 \times 0,6^6 \times 0,4^3 \approx 0,25$$

2.2.

Sejam os acontecimentos:

B: "o destino da viagem é Berlim"

A: "o passageiro segue viagem"

Como $P(\bar{A} | B) = 0,05$ então $P(\bar{A} \cap B) = 0,05 \times 0,3 = 0,015$

Como $P(A|\bar{B}) = 0,92$ então $P(\bar{B} \cap A) = 0,92 \times 0,7 = 0,644$

Esquemmatizando na tabela seguinte os resultados fornecidos e os obtidos, temos:

| | A | \bar{A} | Total |
|-----------|-------|-----------|-------|
| B | 0,285 | 0,015 | 0,3 |
| \bar{B} | 0,644 | 0,056 | 0,7 |
| Total | 0,929 | 0,071 | 1 |

$$P(\bar{A}) = P(B \cap \bar{A}) + P(\bar{B} \cap \bar{A}) = 0,015 + 0,056 = 0,071 = \frac{71}{1000}$$

3.

$$P(B|A) \geq 1 - \frac{1 - P(B)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \geq \frac{P(A) - 1 + P(B)}{P(A)} \quad (1)$$

Como $P(A) > 0$, então, de (1) vem que:

$$P(B \cap A) \geq P(A) - 1 + P(B) \Leftrightarrow 1 \geq P(A) + P(B) - P(B \cap A) \Leftrightarrow 1 \geq P(B \cup A) \Leftrightarrow P(B \cup A) \leq 1$$

o que se verifica ser uma proposição verdadeira, na axiomática de Kolmogorov, quaisquer que sejam os acontecimento A e B nas condições dadas. Fica assim provada a condição inicial.

4.

Vamos começar por calcular $T'(t)$

$$\begin{aligned} T'(t) &= 0,2t \times e^{-0,15t} + 0,1t^2 \times (-0,15e^{-0,15t}) = 0,2t \times e^{-0,15t} - 0,015t^2 \times e^{-0,15t} = \\ &= e^{-0,15t} (0,2t - 0,015t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T'(t) = 0 &\Leftrightarrow e^{-0,15t} (0,2t - 0,015t^2) = 0 \Leftrightarrow 0,2t - 0,015t^2 = 0 \Leftrightarrow t(0,2 - 0,015t) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee 0,2 - 0,015t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{-0,2}{-0,015} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

| | | | | | | |
|---------|---|---|----------------|-----|---------|--|
| t | 0 | | $\frac{40}{3}$ | | 20 | |
| $T'(t)$ | 0 | + | 0 | - | -0,0996 | |
| $T(t)$ | | ↗ | | Máx | ↘ | |

$$\frac{40}{3} = \frac{39}{3} + \frac{1}{3} = 13 + \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3} \times 60 = 20$$

A temperatura máxima será atingida às 13h20m.

5.

5.1.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{2}{+\infty} + 0 = 0$$

Pelo que verificamos que $y = 0$ é assíntota de f .

Como $e > 1$ então basta determinar $f'(x)$ para $x \geq 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(e) = \frac{-1 - \ln e}{e^2} = \frac{-2}{e^2}$$

O declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa e será $m = \frac{-2}{e^2}$.

Como o ponto de tangência pertence ao gráfico de f , vem: $f(e) = \frac{2 + \ln e}{e} = \frac{3}{e}$

Assim, substituindo na equação da recta $y = \frac{-2}{e^2}x + b$, temos:

$$\frac{3}{e} = -\frac{2}{e^2} \times e + b \Leftrightarrow \frac{3}{e} = -\frac{2}{e} + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{e}$$

A equação da recta tangente ao gráfico no ponto de abscissa e será: $y = -\frac{2}{e^2}x + \frac{5}{e}$

As coordenadas do ponto P serão determinadas a partir da seguinte condição:

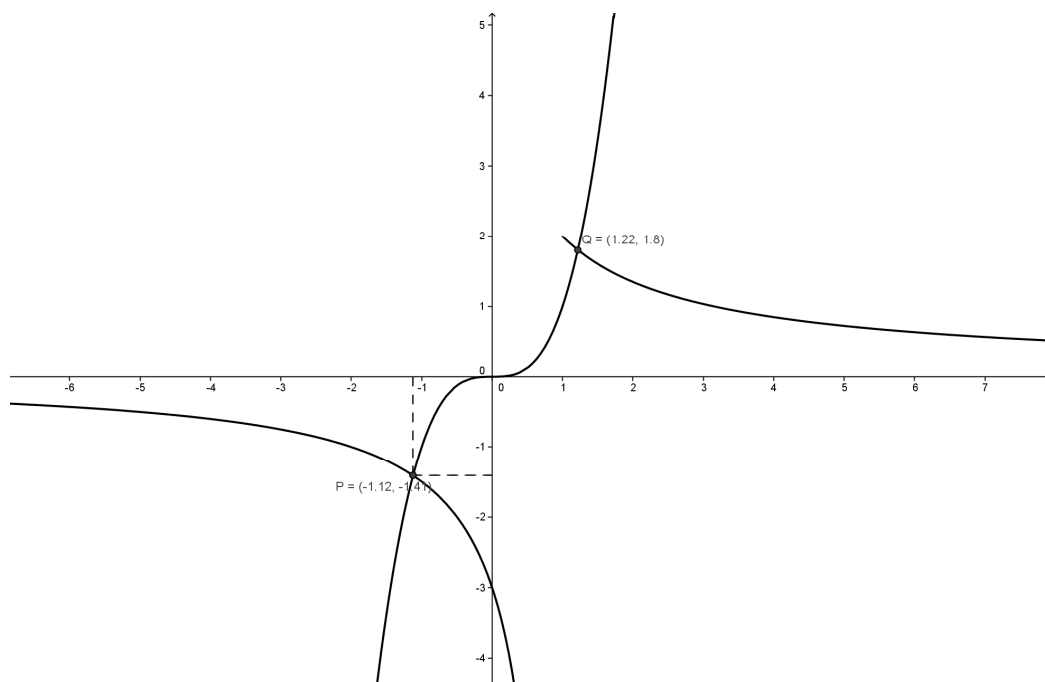
$$-\frac{2}{e^2}x + \frac{5}{e} = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{e^2}x = -\frac{5}{e} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{e} \times \left(-\frac{e^2}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}e$$

As coordenadas do ponto P serão: $\left(\frac{5}{2}e ; 0\right)$

5.2.

Para determinar os pontos no gráfico de f cujas ordenadas são o cubo das abscissas

temos que verificar a condição: $f(x) = x^3$



Os pontos que verificam a condição $f(x) = x^3$ são: $P(-1,12; -1,41)$ e

$Q(1,22; 1,80)$.

6.

6.1.

A área do trapézio é determinada a partir da seguinte fórmula:

$$\text{Área} = \frac{\overline{AD} + \overline{CB}}{2} \times \overline{DC}$$

Como a abcissa do ponto D é $-\frac{\pi}{6}$ então temos que $\overline{CB} = \frac{\pi}{6}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, temos que $x = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Assim: } \overline{AD} = \left| \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right| = \frac{5\pi}{12}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 \cos\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cos\frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

Logo, $\overline{CD} = 2$

A área do trapézio será:

$$\text{Área} = \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{6}}{2} \times 2 = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} \text{ u.a.}$$

6.2.

$$f'(x) = -8 \sin(2x) \quad \text{e} \quad f''(x) = -16 \cos(2x)$$

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x) + f''(x) &= 4 \cos(2x) - 8 \sin(2x) - 16 \cos(2x) = \\ &= -12 \cos(2x) - 8 \sin(2x) = -4(3 \cos(2x) + 2 \sin(2x)) \text{ c.q.d.} \end{aligned}$$

7.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \times (x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \vee x^2 - 5x + 4 = 0$$

Como $g(x) > 0, \forall_{x \in \mathbb{R}}$, então: $x = 1 \vee x = 4$

| x | $-\infty$ | 1 | | 4 | $+\infty$ |
|----------|-----------|---|---|---|-----------|
| $f''(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ∪ | | ∩ | | ∪ |

O gráfico III representa a função f .

O gráfico I não pode representar a função f porque não tem os sentidos de concavidade de acordo com os determinados na tabela em cima.

O gráfico II não pode representar a função f porque $f(1) \times f(4) < 0$, o que contradiz um dos pressupostos do enunciado.

O gráfico IV não pode representar a função f porque apresenta um ponto de descontinuidade, o que não se pode verificar pelo facto de f'' ser finita em todos os pontos do seu domínio.