

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO
 SECUNDÁRIO
 (CÓDIGO DA PROVA 735) – 1ª FASE – 25 DE JUNHO 2013**

GRUPO I

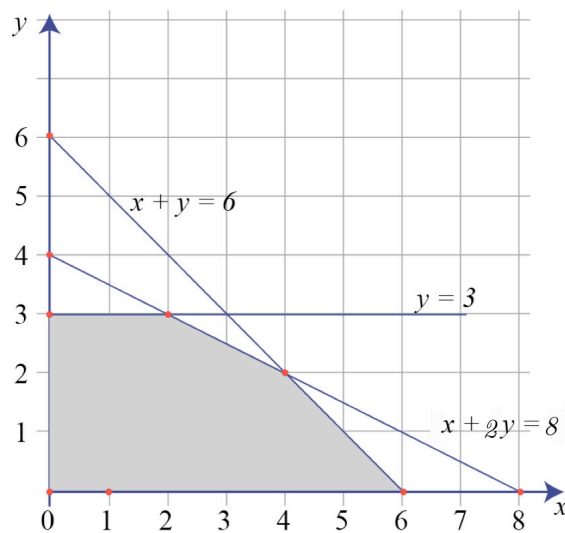
1. A função objetivo é o lucro, que se pretende maximizar:

$$L(x, y) = 500x + 600y$$

As restrições do problema são:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ x + y \leq 6 \\ 2000x + 4000y \leq 16000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 8 \end{cases}$$

A região admissível é a representada a cinzento na figura:



Os valores do lucro correspondentes aos vértices do polígono que representa a região admissível são:

x	y	$L = 500x + 600y$
0	3	1800
6	0	3000
2	3	2800
4	2	3200

Para obter o lucro máximo deverão ser vendidas 4 mil toneladas de azeite no mercado interno e 2 mil no mercado externo.

- 2.1. A quantidade total de azeite vendido durante a sétima semana é a diferença entre a quantidade vendida até à sétima semana, $V(7)$, e a quantidade vendida até à sexta semana, $V(6)$:

$$V(7) - V(6) = \frac{550}{1 + e^{-0,42 \times 7}} - 275 - \frac{550}{1 + e^{-0,42 \times 6}} + 275$$

$$V(7) - V(6) \approx 13,341$$

O número de embalagens de 0,75 l é dado por:

$$\frac{V(7) - V(6)}{0,75} \approx 17,7882$$

Se o produtor tivesse embalado o máximo possível do que produziu na sétima semana, teria vendido no máximo 17 embalagens de 75 cl de azeite.

- 2.2. A quantidade total de azeite, em litros, vendido durante as 10 semanas foi de:

$$V(10) = \frac{550}{1 + e^{-0,42 \times 10}} - 275 \approx 266,874$$

Se a quantidade que foi vendida embalada é cerca de 43% do total, a quantidade vendida a granel é cerca de 57%:

$$0,57 \times V(10) \approx 152,12$$

A quantidade total de azeite vendido a granel durante as 10 semanas foi de 152 litros, aproximadamente.

GRUPO II

1. Representando por E o caso em que a bola desce pelo espaço imediatamente à esquerda de cada e por D o caso em que a bola desce pelo espaço imediatamente à direita, numa placa com duas linhas, os casos possíveis, todos equiprováveis, são

2ª linha /	E	D
1ª linha	E	D
E	cavidade esquerda	cavidade central
D	cavidade central	cavidade direita

Portanto, a probabilidade de se depositar na cavidade central é 0,5.

2. O total de pregos é a soma $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ ou seja a soma dos 100 primeiros termos de uma progressão aritmética em que o primeiro termo é 1 e a razão também é 1. Logo:

$$S = \frac{1+100}{2} \times 100 = 5050$$

O total de pregos de uma Quincunx com 100 linhas é 5050 pregos.

3. O número de pregos da última linha é igual ao número de linhas. O número de cavidades é igual ao número de pregos da última linha mais um. Se a última linha tiver n pregos,

$$\begin{aligned} n - 1 + n &= 435 \\ 2n &= 436 \\ n &= 218 \end{aligned}$$

Então, o número de cavidades é 219.

4. De acordo com o modelo definido, a probabilidade de uma bola se depositar entre a cavidade 60 e a cavidade 83 é dada por:

$$\begin{aligned} P(59,5 < X < 83,5) &= 0,8717\dots \\ \text{normalcdf}(59.5, 83.5, 76.5, 6.1) \end{aligned}$$

```
normalcdf(59.5,8
3.5,76.5,6.1)
.8717599699
5000*0.8718
4359
■
```

Como há 5000 bolas, o número de bolas que se espera que venham a depositar-se entre as cavidades 60 e 83 são

$$0,8717\dots \times 5000 = 4358,799\dots$$

cerca de 4359 bolas.

GRUPO III

1. Introduzindo a tabela dada nas listas 1 e 2 da calculadora, obtém-se os seguintes valores para os coeficientes da regressão sinusoidal $F(x) = a \sin(bx + c) + d$

$$a \approx 2,126 \quad b \approx 0,017 \quad c \approx -1,342 \quad d \approx 12,133$$

O número de ordem do dia 1 de Dezembro é $366 - 30 = 336$.

Então $F(336) = 10,167\dots$

O comprimento do dia 1 de Dezembro de 2012 foi de cerca de 10 horas.

L1	L2	L3	Z
121	13.47		
161	14.27		
201	14.02		
241	12.95		
281	11.63		
321	10.45		
361	10.02		

L2(10) = 10.02

```
SinReg
y=a*sin(bx+c)+d
a=2.125985987
b=.0168543005
c=-1.34200397
d=12.13269995
```

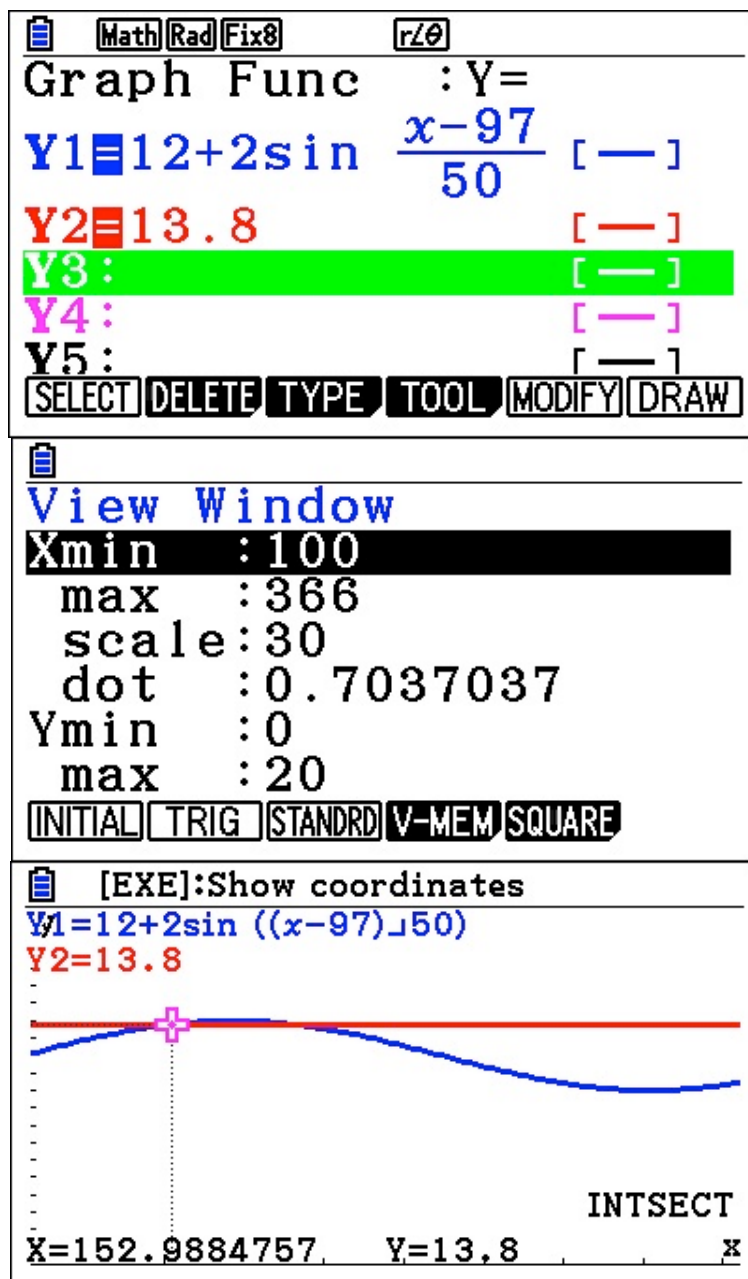
2. O número dos dias que têm comprimento superior a 13 horas e 48 minutos são as soluções da inequação

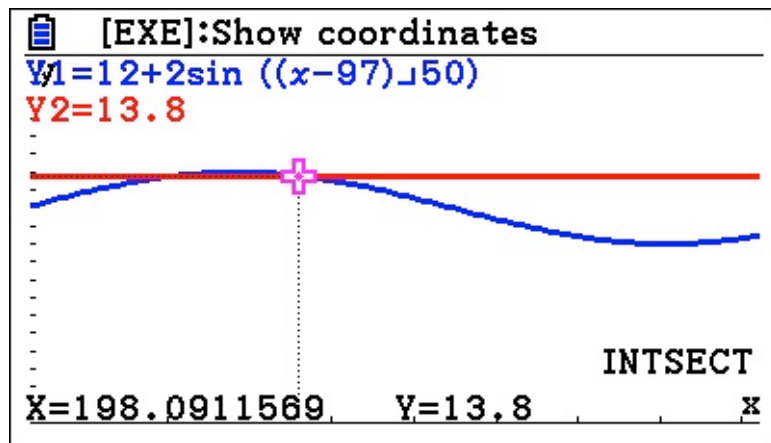
$$C(x) > 13 + 48/60$$

$$12 + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{x - 97}{50} \right) > 13,8$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{x - 97}{50} \right) > 0,9$$

Resolvendo esta equação graficamente,





obtemos as soluções

$$153 < x < 198$$

Os primeiros 6 meses do ano – Janeiro a Junho – têm

$$31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 = 182 \text{ dias}$$

Então o número de dias do mês de Julho, que verificam a condição é $198 - 182 = 16$.

Houve 16 dias no mês de Julho cujo comprimento foi superior a 13 horas e 48 minutos.

GRUPO IV

1.1. Comprimento da circunferência de raio 8 = 16π

$$\text{Soma dos comprimento dos arcos de circunferência DC+DE} = \frac{120 \times 16\pi}{360} = \frac{16\pi}{3}$$

$$\text{Perímetro da face exterior da janela} = 2 \times 10 + 8 + \frac{16\pi}{3} \approx 44,7551$$

Perímetro da face exterior da janela é aproximadamente 44,76 dm

1.2. Área do círculo de raio 8 = 64π

$$\text{Área do sector circular ECD} = \frac{60 \times 64\pi}{360} = \frac{32\pi}{3} \approx 33,510$$

A Área do sector circular é aproximadamente $33,5 \text{ dm}^2$

1.3. Altura do triângulo EDC = $8 \times \text{sen}60^\circ$

$$\text{Área do triângulo EDC} = \frac{8 \times 8 \text{sen}60^\circ}{2} = 32 \times \text{sen}60^\circ$$

$$\text{Área da face exterior da janela} = 2 \times \frac{32\pi}{3} - 32 \times \text{sen}60^\circ + 10 \times 8 \approx 119,308$$

Área da face exterior da janela é aproximadamente 119 dm^2

2. Para um perímetro constante, a área da face exterior da janela é máxima quando o comprimento de x é igual a $9,4 \text{ dm}$ e o comprimento y é $5,9 \text{ dm}$.
3. Um exemplo de composição é o seguinte:

A afirmação A) é verdadeira pois se $k=20$, $P(5) = 10^{1,9} \approx 79,43$. Logo, a percentagem de luz que atravessa um vidro com 5 mm de espessura é, de acordo com os dados, superior a 75% .

A afirmação B) é falsa pois é dado que $P(5) \approx 70$ e podemos obter um valor aproximado para k a partir da equação $10^{-0,005k+2} = 70$. Esta equação é equivalente a

$$-0,005k + 2 = \log_{10} 70$$

o que nos permite concluir que

$$k = \frac{\log_{10} 70 - 2}{-0,005}$$

aproximadamente. Assim k aparece maior do 30 ou seja é maior do que 20 .

Para ver o que se passa com a afirmação C) teremos de comparar $P(x)$ com $P(x+15)$, para $k = 20$. Vem que

$$\frac{P(x+15)}{P(x)} = \frac{10^{-0,02(x+15)+2}}{10^{-0,02x+2}} = 10^{-0,3} \approx 0,5$$

Logo a percentagem de luz que atravessa o vidro de maior espessura é cerca de metade da percentagem de luz que atravessa o vidro de menor espessura. Assim, a afirmação C) é verdadeira.