

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA B DO ENSINO SECUNDÁRIO
(CÓDIGO DA PROVA 735) – 2ª FASE – 21 DE JULHO 2015

GRUPO I

1.1. De acordo com o modelo apresentado temos que calcular a diferença entre $G(2)$ e $G(11)$.

Utilizando as potencialidades da calculadora, introduzindo $y_1 = 0,9(x+0,5)^3 \times e^{-0,6x}$ determinamos o valor da função para $x = 2$ e para $x = 11$, obtendo:

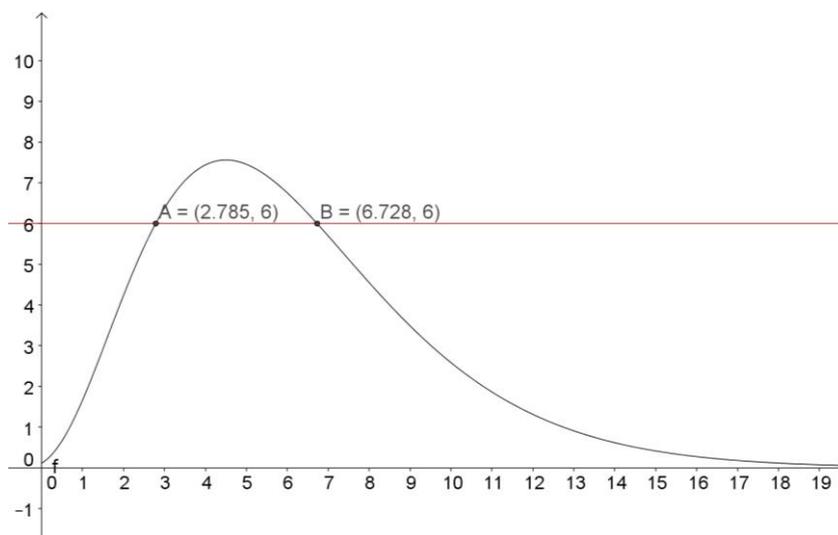
$$G(2) \approx 4,23554 \quad \text{e} \quad G(11) \approx 1,86205$$

$$\text{Pelo que: } G(2) - G(11) = 4,23554 - 1,86205 = 2,37349 \approx 2,37$$

Assim, o número de gafanhotos existente na semana dois após a localização da praga, $G(2)$, excede em 2,37 milhões o existente na semana onze, $G(11)$.

1.2. Utilizando as potencialidades da calculadora, traçamos o gráfico da função definida por $G(x)$ e a reta definida pela equação $y = 6$, de forma a determinarmos as soluções da inequação $G(x) > 6$

Fazendo, por exemplo, $y_1 = 0,9(x+0,5)^3 \times e^{-0,6x}$ e $y_2 = 6$, obtemos uma representação como a que se segue:



Os pontos A e B são os pontos de interseção do gráfico de G com a reta.

Fazendo a diferença entre as suas abcissas, obtemos:

$$6,728 - 2,785 \approx 3,94 \text{ semanas.}$$

Convertendo em dias:

$$3,94 \times 7 = 27,58$$

Apenas durante 27 dias completos o número de gafanhotos foi superior a 6 milhões.

- 2.1. A função definida por $A(x)$ retrata um modelo de crescimento logístico. De acordo com a sua expressão podemos concluir que o gráfico de A admite uma assintota horizontal de equação $y=12$, o que, no contexto do problema, significa que a área afetada vai aumentando, mas não chega a atingir as 12 centenas de Km^2 .
Desta forma, a área total afetada nunca atingirá, por maioria de razão as 14 centenas de Km^2 , isto é, será sempre inferior a 1400 Km^2 .
- 2.2. No contexto descrito $T(6) \approx 1,3$ significa que na 6ª semana após a localização do enxame, a área agrícola afetada se encontra a crescer à razão, aproximada, de 130 Km^2 por semana, uma vez que T é a taxa de variação instantânea de A e que $1,3 \times 100 = 130$.

GRUPO II

1. De acordo com os dados fornecidos, temos que a altura do cone de revolução que dá origem à maquete é $11,2 + h$ cm.

Atendendo à semelhança dos triângulos envolvidos e, portanto, à proporcionalidade entre os seus lados, temos que:

$$\frac{15}{11,2 + h} = \frac{6,6}{h} \Leftrightarrow 15h = 6,6 \times (11,2 + h)$$

$$\Leftrightarrow 15h = 73,92 + 6,6h$$

$$\Leftrightarrow 15h - 6,6h = 73,92$$

$$\Leftrightarrow 8,4h = 73,92 \Leftrightarrow h = \frac{73,92}{8,4} = 8,8 \text{ cm}$$

2. Seja g a geratriz do cone de revolução que é cortado, isto é, do cone de altura 8,8 cm e raio da base 6,6 cm. Então, pelo teorema de Pitágoras temos que:

$$g^2 = 6,6^2 + 8,8^2 \Leftrightarrow g = \sqrt{6,6^2 + 8,8^2} \Leftrightarrow g = 11$$

Assim a área lateral do cone cortado é $A_c = \pi \times 6,6 \times 11 \approx 228,08 \text{ cm}^2$

Como a área lateral do cone antes de efetuar o corte é 1178 cm^2 , temos que a área lateral do tronco de cone (correspondente ao reservatório) na maquete é:

$$A_{\text{reservatório}} = 1178 - 228,08 = 949,92 \approx 950 \text{ cm}^2$$

Como o reservatório é uma ampliação da maquete de razão 100 nas medidas lineares, a área lateral do reservatório é aproximadamente, na realidade,

$$100^2 \times 950 = 9500000 \text{ cm}^2 = 950 \text{ m}^2,$$

- 3.1. Os raios estão em progressão aritmética de razão 0,3 e primeiro termo 6,9 .

O raio da segunda circunferência é então $6,9 + 0,3 = 7,2 \text{ m}$.

O perímetro da circunferência menor é $p_1 = 2\pi \times 6,9 = 13,8\pi$

O perímetro da circunferência seguinte será $p_2 = 2\pi \times 7,2 = 14,4\pi$

Como os perímetros estão em progressão aritmética, a razão é a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos.

Então a razão é $r = p_2 - p_1 = 14,4\pi - 13,8\pi = 0,6\pi$ metros.

- 3.2. $p_1 = 13,8\pi$ como vimos atrás e $p_{27} = 13,8\pi + 0,6\pi \times 26 = 13,8\pi + 15,6\pi = 29,4\pi$

A soma dos 27 perímetros pintados é, então:

$$S = \frac{13,8\pi + 29,4\pi}{2} \times 27 = 21,6\pi \times 27 \approx 1832 \text{ metros.}$$

4. Se V tem cota 20, as suas coordenadas são $(0,0,20)$, pelo que o ponto simétrico de V em relação ao plano xOy tem coordenadas $(0,0,-20)$.

GRUPO III

1. Como os segmentos $[A, B]$ e $[A, C]$ representam uma das correntes do baloiço, temos que $\overline{AB} = \overline{AC}$, pelo que $\overline{AD} = \overline{AB} - 8$

$$\begin{aligned}\text{Por outro lado: } \cos(55^\circ) &= \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \cos(55^\circ) = \frac{\overline{AB} - 8}{\overline{AB}} \\ &\Leftrightarrow \overline{AB} \times \cos(55^\circ) = \overline{AB} - 8 \\ &\Leftrightarrow 0,574 \overline{AB} = \overline{AB} - 8 \\ &\Leftrightarrow \overline{AB} - 0,574 \overline{AB} = 8 \\ &\Leftrightarrow 0,426 \overline{AB} = 8 \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8}{0,426} \approx 18,8\end{aligned}$$

O comprimento da corrente é, aproximadamente, 18,8 dm.

2. Um dos maximizantes da função H é 5,6, pelo que $H(5,6) = 13$, o que nos permite encontrar o valor de a .

$$\begin{aligned}H(5,6) = 13 &\Leftrightarrow 9 - a \sin(0,625\pi \times 5,6) = 13 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{13 - 9}{-\sin(0,625\pi \times 5,6)} \Leftrightarrow a = \frac{4}{-(-1)} \Leftrightarrow a = 4\end{aligned}$$

Como dois maximizantes consecutivos são 5,6 e 8,8, e como $8,8 - 3,6 = 3,2$, então a função H assume os mesmos valores de 3,2 em 3,2 segundos, isto é, é periódica de período 3,2. Como $18 - 3,2 = 14,8$, então $H(t + 3,2) = H(t)$ para qualquer $t \in [0; 14,8]$.

O valor (-12) na expressão analítica da função S , faz com que o seu gráfico seja um deslocamento, na horizontal, do gráfico de H , 12 unidades para a direita. Significa, assim, que o Samuel começou a andar no baloiço 12 segundos depois da Helena, atingindo as mesmas distâncias (mínima e máxima) ao solo que ela.

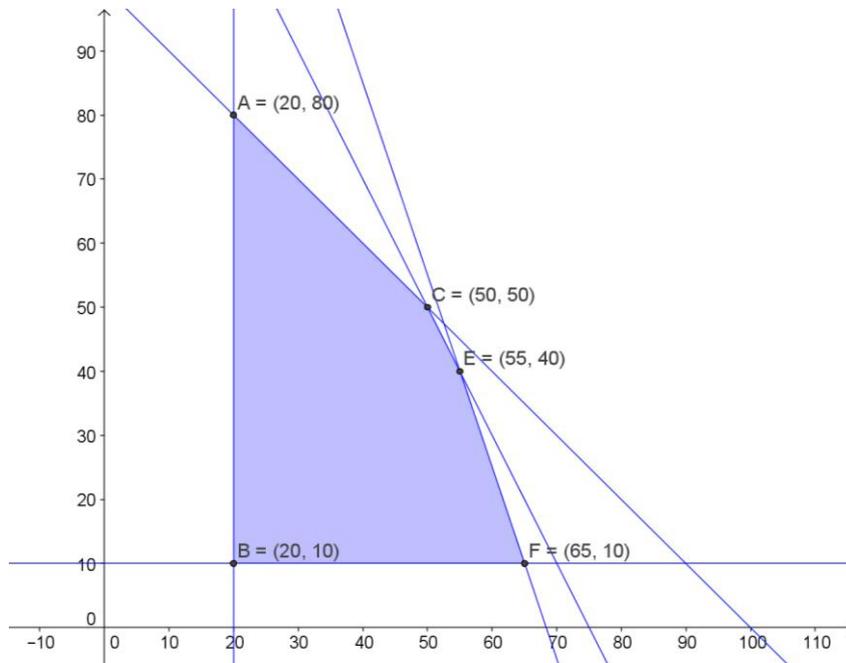
GRUPO IV

1. A função objetivo é o lucro e é dada por $L(x, y) = 1500x + 3000y$

Atendendo à informação dada, o problema apresenta as seguintes restrições:

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \\ 2000x + 1000y \leq 150000 \\ 3000x + 1000y \leq 205000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -x + 100 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \\ y \leq -2x + 150 \\ y \leq -3x + 205 \end{cases}$$

O que conduz a seguinte representação gráfica da região admissível:



Testemos as possíveis soluções ótimas:

x	y	$L(x, y) = 1500x + 3000y$
20	80	270000
20	10	60000
50	50	225000
55	40	202500
65	10	127500

A solução ótima é a correspondente ao ponto A, pelo que a empresa deve cultivar 20 hectares de trigo e 80 hectares de vinha para obter o lucro máximo no próximo ano agrícola.

2.1. Procuramos os pares de dias consecutivos em que choveu, uma vez que no dia em que a Edite escreveu a frase choveu e pretendemos obter a probabilidade de no dia seguinte ter também chovido.

Esses pares de dias são: $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(10,11)$ e $(13,14)$.

O número de casos favoráveis corresponde a este número de pares, isto é, a 6.

O número de casos possíveis corresponde ao número de pares de dias em que no primeiro dia choveu, isto é, 10, uma vez que temos os seguintes pares:

$(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $(7,8)$, $(10,11)$, $(11,12)$, $(13,14)$ e $(14,15)$.

A probabilidade pedida é então: $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

2.2. Designemos por a_0 o valor da precipitação em 2010, por a_1 o valor em 2011, por a_2 o valor em 2012 e por a_3 o valor da precipitação em 2013.

Se ordenarmos os valores, de acordo com a informação dada, obtemos que $a_2 < \dots < \dots < a_3$

Os valores centrais são a_0 e a_1 .

Atendendo ao valor da mediana, temos que:

$$\frac{a_0 + a_1}{2} = 1314,350 \Leftrightarrow a_0 + a_1 = 2628,700$$

Por outro lado, e atendendo ao valor da média, temos:

$$\frac{a_0 + a_1 + a_2 + a_3}{4} = 1270,125 \Leftrightarrow 2628,700 + a_2 + a_3 = 4 \times 1270,125$$

$$\Leftrightarrow a_2 + a_3 = 4 \times 1270,125 - 2628,700 \Leftrightarrow a_2 + a_3 = 2451,8$$

Ora, assim, a média da precipitação total anual dos anos de 2012 e 2013 é dada por:

$$\frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{2451,8}{2} = 1225,9 \text{ mm.}$$