

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática B**

---

11.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 735/1.ª Fase**

---

Critérios de Classificação

12 Páginas

---

**2016**

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens com cotação igual ou superior a 20 pontos e que envolvam a produção de um texto tem em conta a clareza, a organização dos conteúdos e a utilização do vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação de todos os elementos visualizados na sua utilização.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto. O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «recorrendo à regressão sinusoidal»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando a resolução do item exige cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.

Situação	Classificação
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não alterem o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os critérios gerais e específicos de classificação.

Situação	Classificação
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	<p>Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.</p> <p>Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos, no máximo, dois pontos à soma das pontuações atribuídas.</p>
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	<p>É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos;</li> <li>– nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.</li> </ul>

**Nota** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

# CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

## GRUPO I

1. ....	30 pontos
Indicar a função objetivo ( $L(x, y) = 100x + 150y$ ) .....	2 pontos
Indicar as restrições ( <b>ver nota 1</b> ) .....	11 pontos
$20x + 40y \leq 480$ (ou equivalente) ( <b>ver notas 2 e 3</b> ) .....	3 pontos
$30x + 30y \leq 480$ (ou equivalente) ( <b>ver notas 2 e 3</b> ) .....	3 pontos
$40x + 20y \leq 560$ (ou equivalente) ( <b>ver notas 2 e 3</b> ) .....	3 pontos
$x \geq 0$ .....	1 ponto
$y \geq 0$ .....	1 ponto
Representar graficamente a região admissível .....	6 pontos
Representar graficamente a reta de equação $20x + 40y = 480$ ..	1 ponto
Representar graficamente a reta de equação $30x + 30y = 480$ ..	1 ponto
Representar graficamente a reta de equação $40x + 20y = 560$ ..	1 ponto
Assinalar o polígono .....	3 pontos
Calcular o valor de $x$ e o valor de $y$ correspondentes à solução do problema ....	11 pontos
Obter as coordenadas dos vértices do polígono que não pertencem aos eixos coordenados ((12, 4) e (8, 8)) ..... (2+2) .....	4 pontos
Obter as coordenadas dos vértices do polígono que pertencem aos eixos coordenados, com exceção da origem ((14, 0) e (0, 12)) ..... (1+1) .....	2 pontos
Calcular o valor da função objetivo em cada um dos vértices do polígono, com exceção da origem (ou implementar o método da paralela à reta de nível zero) ( <b>ver nota 4</b> ) ..... (1x4) .....	4 pontos
Indicar os valores pedidos ( $x = 8$ e $y = 8$ ) .....	1 ponto

### Notas:

1. Se, em alguma das restrições, for utilizado incorretamente o símbolo «<», em vez do símbolo «≤», ou o símbolo «>», em vez do símbolo «≥», a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto, no total.
2. Se, na restrição, for utilizado incorretamente o símbolo «=», em vez do símbolo «≤», a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se, na restrição, for utilizado incorretamente o símbolo «≥», em vez do símbolo «≤», a pontuação a atribuir a este passo é desvalorizada em 2 pontos.
4. No caso de ser aplicado o método da paralela à reta de nível zero, se apenas for representada corretamente esta reta, a pontuação a atribuir a este passo é 2 pontos.

**2.1. .... 10 pontos**

- Calcular o número de operários que trabalham em ambos os departamentos (3).. 5 pontos
- Identificar o número de casos possíveis (20) ..... 2 pontos
- Apresentar uma expressão para a probabilidade  $\left(\frac{3}{20}\right)$ ..... 1 ponto
- Apresentar o valor pedido (15%)..... 2 pontos

**2.2. .... 20 pontos**

- Identificar a probabilidade de o operário ter faltado no máximo 2 dias com  $P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2)$  ..... 3 pontos
- Escrever uma expressão que permita obter o valor de  $a$  ..... 4 pontos
- Obter  $a = 0,2$  ..... 2 pontos
- Escrever uma expressão que permita obter o valor de  $b$  ..... 4 pontos
- Obter  $b = 0,05$  ..... 2 pontos
- Calcular o valor médio de  $Z$ ..... 5 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Escrever uma expressão para o valor médio ..... 4 pontos
- Obter o valor médio (0,65) ..... 1 ponto

**2.º Processo**

- Apresentar as listas introduzidas na calculadora ..... 1 ponto
- Obter o valor médio, recorrendo às pontencialidades estatísticas da calculadora (0,65) ..... 4 pontos

## GRUPO II

1. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Obter o número de períodos de 20 minutos correspondentes a 5 horas (15) ... 3 pontos

Apresentar uma expressão numérica referente ao número de bactérias existentes ( $2^{16}$ ) ..... 5 pontos

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

### 2.º Processo

Definir por recorrência a sucessão  $(u_n)$  do número de bactérias existentes na geração  $n$  ( $u_1 = 2 \wedge u_{n+1} = 2 \times u_n$ ) ..... 5 pontos

Apresentar uma tabela da sucessão com a linha relevante para a resolução do problema ..... 3 pontos

Concluir o pretendido ..... 2 pontos

2. .... **15 pontos**

Justificar que  $(b_n)$  é uma progressão geométrica..... 5 pontos

Identificar a razão dessa progressão (2) ..... 5 pontos

Apresentar o termo geral ( $b_n = 1000 \times 2^{n-1}$  ou equivalente) ..... 5 pontos

### GRUPO III

1. .... 20 pontos

Tópicos de resposta:

- de acordo com o gráfico representado na Figura 1, os dias em que foram atendidas mais de 180 pessoas com sintomas de gripe não foram sempre consecutivos;
- no gráfico representado na Figura 2, a imagem de 40 é 0
- o dia 30 de janeiro corresponde a  $x = 20$ , e 20 não é um extremante da função cujo gráfico está representado na Figura 3.

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
4	Apresenta os três tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	20
3	Apresenta os três tópicos, com pouca clareza ou com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico. OU Apresenta apenas dois dos três tópicos, de forma clara e organizada e com vocabulário específico adequado.	14
2	Apresenta apenas dois dos três tópicos, com pouca clareza ou com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização do vocabulário específico. OU Apresenta apenas um dos três tópicos, de forma clara e com vocabulário específico adequado.	8
1	Apresenta apenas um dos três tópicos, com pouca clareza ou com falhas na utilização do vocabulário específico.	2



Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

Traduzir o problema pela condição  $N_A(t) > 100$  (ver nota 1) ..... 2 pontos

Resolver a condição  $N_A(t) > 100$  ..... 10 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**Processo A**

Representar graficamente a função  $N_A$  ..... 4 pontos

Respeitar o domínio (ver nota 2) ..... 2 pontos

Respeitar a forma do gráfico ..... 2 pontos

Representar graficamente a reta de equação  $y = 100$  ..... 2 pontos

Assinalar o ponto de intersecção da reta de equação  $y = 100$  com o gráfico de  $N_A$  ..... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto de intersecção (15,23719...) ..... 3 pontos

**Processo B**

Escrever  $325 > 100 \times (1 + 12 \times 3^{-0,1t})$  ..... 1 ponto

Escrever  $\frac{225}{1200} > 3^{-0,1t}$  ..... 2 pontos

Escrever  $-0,1t < \log_3\left(\frac{225}{1200}\right)$  ..... 3 pontos

Escrever  $t > \frac{\log_3\left(\frac{225}{1200}\right)}{-0,1}$  ..... 2 pontos

Obter  $t > 15,23719...$  ..... 2 pontos

Converter 0,23719... dias em horas (6) ..... 2 pontos

Apresentar o valor pedido (15 dias e 6 horas) ..... 1 ponto

**Notas:**

1. Se, em vez de ser traduzido o problema, for apresentada alguma das condições  $N_A(t) \geq 100$ ,  $N_A(t) \leq 100$  ou  $N_A(t) < 100$ , a pontuação a atribuir a esta etapa não é desvalorizada.

2. Se for apresentada apenas parte do gráfico da função  $N_A$ :

- num intervalo  $[0, b]$ , com  $b < 40$ , que permita obter a abcissa do ponto de intersecção, a pontuação a atribuir a este passo não é desvalorizada;
- num intervalo  $[a, b] \subset [0, 40]$ , com  $a \neq 0$ , que permita obter a abcissa do ponto de intersecção, e for referido que a função  $N_A$  é crescente, a pontuação a atribuir a este passo não é desvalorizada.

**2.º Processo**

Escrever a equação  $N_A(t) = 100$  ..... 1 ponto

Escrever  $325 = 100 \times (1 + 12 \times 3^{-0,1t})$  ..... 1 ponto

Escrever  $\frac{225}{1200} = 3^{-0,1t}$  ..... 2 pontos

Escrever $-0,1 t = \log_3\left(\frac{225}{1200}\right)$ .....	3 pontos
Escrever $t = \frac{\log_3\left(\frac{225}{1200}\right)}{-0,1}$ .....	1 ponto
Obter o valor de $t$ (15,23719...) .....	2 pontos
Referir que a função $N_A$ é crescente .....	2 pontos
Converter 0,23719... dias em horas (6) .....	2 pontos
Apresentar o valor pedido (15 dias e 6 horas) .....	1 ponto

**2.1.2. .... 10 pontos**

Identificar as oito horas do dia 20 de janeiro de 2016 com $t = 10$ .....	2 pontos
Equacionar o problema ( $39 = k \times N_A(10)$ ) .....	3 pontos
Obter $N_A(10)$ (65) .....	3 pontos
Escrever $39 = k \times 65$ .....	1 ponto
Obter o valor pedido (0,6 ou equivalente) .....	1 ponto

**2.2. .... 10 pontos**

Referir que a função $V$ é positiva (ou apresentar a tabela de sinal da função $V$ ) .....	3 pontos
Referir que a função $N_C$ é crescente (ou apresentar a tabela de monotonia da função $N_C$ ) .....	2 pontos
Referir que 40 é o maximizante da função $N_C$ (ou referir que $N_C(40)$ é o valor máximo da função $N_C$ ) .....	3 pontos
Identificar $t = 40$ com as oito horas do dia 19 de fevereiro de 2016 .....	2 pontos

## GRUPO IV

1. .... **15 pontos**

Utilizar um triângulo retângulo cujos catetos sejam o apótema e a metade do lado do triângulo  $[ABC]$  e cuja hipotenusa seja um raio da circunferência de centro no ponto  $O$  ..... 2 pontos

Identificar a amplitude de um dos ângulos agudos desse triângulo ( $30^\circ$  ou  $60^\circ$ ) ..... 3 pontos

Escrever uma igualdade que permita calcular o valor de  $x$ , sendo  $x$  metade do comprimento do lado do triângulo  $[ABC]$

$(\cos 30^\circ = \frac{x}{\sqrt{27}}$  ou  $\sin 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{27}})$  ..... 4 pontos

Resolver a igualdade em ordem a  $x$  ..... 2 pontos

Obter o valor de  $x$  (4,5) ..... 2 pontos

Concluir que o comprimento do lado do triângulo  $[ABC]$  é 9 cm ..... 2 pontos

2. .... **15 pontos**

Calcular a altura,  $h$ , do triângulo  $[ABC]$  ..... 6 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

### 1.º Processo

Escrever  $9^2 = 4,5^2 + h^2$  (ou equivalente) ..... 3 pontos

Obter  $h^2 = 60,75$  ..... 2 pontos

Obter o valor de  $h$  ..... 1 ponto

### 2.º Processo

Escrever  $\cos 30^\circ = \frac{h}{9}$  ou  $\sin 60^\circ = \frac{h}{9}$

ou  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{4,5}{h}$  ou  $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{4,5}$  ..... 3 pontos

Resolver a igualdade apresentada em ordem a  $h$  ..... 2 pontos

Obter o valor de  $h$  ..... 1 ponto

Escrever uma expressão da área do triângulo  $[ABC]$  ..... 1 ponto

Obter a área desse triângulo ..... 2 pontos

Obter a área do círculo de centro em  $O$  ..... 2 pontos

Escrever a subtração entre a área do círculo e a área do triângulo ..... 2 pontos

Apresentar o valor pedido ( $50 \text{ cm}^2$ ) ..... 2 pontos

3. .... **15 pontos**
- Escrever  $\sin(\widehat{ORQ}) = \frac{\sqrt{27}}{OR}$  (ou equivalente) ..... 5 pontos
- Substituir  $\overline{OR}$  por  $12 + \sqrt{27}$  ..... 2 pontos
- Obter  $\overline{OR}$  (17,1961...) ..... 1 ponto
- Obter o valor de  $\sin(\widehat{ORQ})$  (0,3021...) ..... 2 pontos
- Obter  $\widehat{ORQ}$  ..... 2 pontos
- Obter  $2 \times \widehat{ORQ}$  ..... 1 ponto
- Apresentar o valor pedido ( $35^\circ$ ) ..... 2 pontos

- 4.1. .... **5 pontos**
- Ponto *B*

- 4.2. .... **10 pontos**
- Obter a razão de semelhança (2) ..... 4 pontos
- Calcular o comprimento da circunferência inscrita no triângulo  $[ABC]$  ..... 6 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo**

- Obter o raio da circunferência inscrita no triângulo ..... 4 pontos
- Obter o valor pedido (16,3) ..... 2 pontos

**2.º Processo**

- Obter o comprimento da circunferência circunscrita ao triângulo ..... 1 ponto
- Escrever uma expressão do comprimento da circunferência inscrita no triângulo ..... 3 pontos
- Obter o valor pedido (16,3) ..... 2 pontos

**COTAÇÕES**

Grupo	Item					Cotação (em pontos)
	Cotação (em pontos)					
I	1.	2.1.	2.2.			60
	30	10	20			
II	1.	2.				25
	10	15				
III	1.	2.1.1.	2.1.2.	2.2.		55
	20	15	10	10		
IV	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	60
	15	15	15	5	10	
<b>TOTAL</b>						<b>200</b>