

**PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO
 SECUNDÁRIO
 (CÓDIGO DA PROVA 635) – 2.ª FASE – 22 DE JULHO DE 2025**

1.

Pede-se para determinar o limite da sucessão de termo geral $U_n = \frac{2n+4}{3n+5}$.

Assim, temos:

$$\lim \left(\frac{2n+4}{3n+5} \right) = \lim \frac{n \left(2 + \frac{4}{n} \right)}{n \left(3 + \frac{5}{n} \right)} = \lim \left(\frac{2 + \frac{4}{n}}{3 + \frac{5}{n}} \right) = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3}$$

Resposta correta: (A)

2.

Dados ordenados, relativos à produção de pera:

10 929 11 565 12 197 17 530 20 208, com mediana 12 197

Dados ordenados, relativos à produção de maçã:

20 087 21 072 21 330 26 067 26 644, com mediana 21 330

A mediana excede a produção de maçã em **9 133** = (21 330 – 12 197) - **I c)**

Aumento da produção de maçã de 2020 para 2021: **6 577** = (26 644 – 20 087)

Percentagem do aumento: $100 \times \frac{6577}{20087} \approx 33\%$ (32,7...%) - **II b)**

Média e desvio padrão dos dados relativos à produção de pera: 14 485.8 e 4136.2, respetivamente, cuja soma é aproximadamente 18 622.

A produção não foi inferior ou igual a 18 622 apenas em 2021, pelo que são 4 os anos em que esta produção foi inferior à soma da média com o desvio padrão - **III c)**

	A pera	B	C	D
=			=OneVar(
1	17530	Título	Estatísti...	
2	11565	\bar{x}	14485.8	
3	20208	Σx	72429.	
4	12197	Σx^2	1117623...	
5	10929	$s_x := s_{n-...}$	4136.15...	

Produção acumulada de maçã, de 2019 a 2024: 136 270

Produção acumulada de pera, de 2019 a 2024: 81 762 = (0.6*136 270)

Produção acumulada de pera, de 2019 a 2023: 72 429

Produção acumulada de pera, em 2024: **9333** = (81762 – 72 429) - **IV b)**

3.

3.1.

A função f é contínua em $x = 0$ se e só se $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$.

Calculamos cada um dos limites laterais, bem como a imagem da função em $x = 0$.

Ora,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 - \frac{1}{e^x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x \times e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{e^x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \underbrace{\left(\frac{e^x - 1}{x} \right)}_{\text{Limite notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x} = 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} \right) = \frac{0 + \ln(e)}{1} = 1$$

Finalmente, $f(0) = 1$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, concluímos que a função f é contínua em $x = 0$.

3.2.

A reta de equação $y = x - 1$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$.

Ora,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex + e)}{x + 1} - (x - 1) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex + e) - (x + 1)(x - 1)}{x + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \ln(ex + e) - x^2 + 1}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(ex + e) + 1}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(e(x + 1)) + 1}{x + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(e) + \ln(x + 1) + 1}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \ln(x + 1) + 1}{x + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x + 1)}{x + 1} + \frac{2}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right) + 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right)\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável do tipo $y = x + 1$ no $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right)$ obtemos $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{y} \right)$, pelo que,

como $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{y} \right) = 0$, logo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x + 1)}{x + 1} \right) = 0$.

Portanto, a reta de equação $y = x - 1$ é assíntota ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

4.

A equação $\frac{1}{2}e^x \ln(4-x)^2 - 5 \ln(4-x) = (5-e^x) \ln(7-2x)$ tem como domínio:

$$D = \{x \in \mathbb{R}: (4-x)^2 > 0 \wedge 4-x > 0 \wedge 7-2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -x > -4 \wedge -2x > -7\} = \\ = \left\{x \in \mathbb{R}: x < 4 \wedge x < \frac{7}{2}\right\} =]-\infty, \frac{7}{2}[.$$

Em D ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}e^x \ln(4-x)^2 - 5 \ln(4-x) = (5-e^x) \ln(7-2x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \times 2e^x \ln(4-x) - 5 \ln(4-x) - (5-e^x) \ln(7-2x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \ln(4-x) (e^x - 5) + (e^x - 5) \ln(7-2x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & (e^x - 5) [\ln(4-x) + \ln(7-2x)] = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & e^x - 5 = 0 \vee \ln[(4-x)(7-2x)] = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & e^x = 5 \vee 28 - 8x - 7x + 2x^2 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x = \ln 5 \vee 2x^2 - 15x + 27 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x = \ln 5 \vee x = 3 \vee x = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Como $\frac{9}{2} \notin D$, então $C.S. = \{\ln 5, 3\}$.

5.

Sabe-se que $P(A \cap \bar{B}) = 0,5$, logo $P(A) - P(A \cap B) = 0,5$.

Como $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,3$, vem que $P(\overline{A \cup B}) = 0,3 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,7$.

Portanto,

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= 0,7 \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) + P(B) = 0,7 \\ \Leftrightarrow & 0,5 + P(B) = 0,7 \\ \Leftrightarrow & P(B) = 0,2 \end{aligned}$$

Resposta correta: (A)

6.

Sabe-se que são 25 alunos, dos quais 64% são rapazes, pelo que a turma é constituída por $0,64 \times 25 = 16$ rapazes.

Assim, a turma é constituída por 16 rapazes e 9 raparigas.

Além disso, sabe-se que $\frac{3}{4}$ dos rapazes têm 17 anos e $\frac{1}{3}$ das raparigas têm 18 anos.

Logo, $\frac{3}{4} \times 16 = 12$ e $\frac{1}{3} \times 9 = 3$ de onde se conclui que:

- 12 dos rapazes têm 17 anos e 4 rapazes têm 18 anos;
- 3 raparigas têm 18 anos e 6 raparigas têm 17 anos.

Como queremos constituir um grupo de 6 alunos dos 25 alunos da turma, então o número de casos possíveis é dado por: ${}^{25}C_6$.

Dado que a Isabel e o José fazem parte do grupo e têm ambos 17 anos, então dois alunos já estão escolhidos e ficamos com 16 alunos com 17 anos dos quais queremos escolher um.

Os três restantes temos de escolher entre o universo dos 7 alunos com 18 anos.

Número de casos favoráveis: $1 \times 1 \times 16 \times {}^7C_3$.

Assim, a probabilidade pedida é igual a $\frac{16 \times {}^7C_3}{{}^{25}C_6} \approx 0,003$.

7.

M pertence à bissetriz do primeiro quadrante pelo que, o número complexo que tem por afixo M tem argumento igual a $\frac{\pi}{4}$.

O ângulo ZOM tem de amplitude $\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{15} = \frac{7\pi}{60}$, logo o ângulo ZOW tem de amplitude $2 \times \frac{7\pi}{60} = \frac{7\pi}{30}$.

Sendo assim, o argumento do número complexo w será igual a $\frac{2\pi}{15} + \frac{7\pi}{30} = \frac{11\pi}{30}$

Resposta correta: (D)

8.

Seja $z = x + yi$

Temos que, $\text{Im}(z) - \text{Re}(z) = 1 \Leftrightarrow y - x = 1 \Leftrightarrow y = x + 1$

$$z = \frac{5ai^{15}}{1-2i} + \sqrt{2} e^{i\frac{7\pi}{4}} \Leftrightarrow z = \frac{5ai^3}{1-2i} + \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-5ai}{1-2i} + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Leftrightarrow z = \frac{-5ai(1+2i)}{1+4} + 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-5ai - 10ai^2}{5} + 1 - i \Leftrightarrow z = \frac{-5ai + 10a}{5} + 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 2a - ai + 1 - i \Leftrightarrow z = (2a + 1) + (-a - 1)i$$

Logo, $\text{Re}(z) = x = 2a + 1$ e $\text{Im}(z) = y = -a - 1$

Como $y = x + 1$ vem $-a - 1 = 2a + 1 + 1 \Leftrightarrow a = -1$

Então, $z = (2 \times (-1) + 1) + (-(-1) - 1)i \Leftrightarrow z = -1 + 0i \Leftrightarrow z = -1$ ou seja $z = e^{i\pi}$

9.

$A(\cos \alpha, \sin \alpha)$; $B(1, \tan \alpha)$ e $C(0, \sin \alpha)$

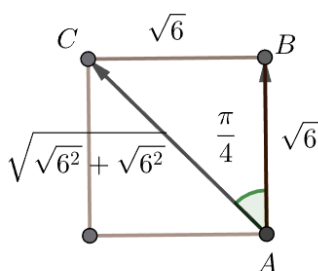
Sendo h a altura do triângulo de base [AC] vem $h = \overline{OC} - \tan \alpha = \sin \alpha - \tan \alpha$

A = Área do triângulo [ABC]

$$\begin{aligned} A &= \frac{\overline{AC} \times h}{2} = \frac{-\cos \alpha \times (\sin \alpha - \tan \alpha)}{2} = \frac{-\cos \alpha \sin \alpha + \cos \alpha \times \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{2} = \\ &= \frac{-\cos \alpha \sin \alpha + \sin \alpha}{2} = \frac{-2 \cos \alpha \sin \alpha + 2 \sin \alpha}{4} = \\ &= \frac{2 \sin \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha}{4} = \frac{2 \sin \alpha - \sin(2\alpha)}{4} \end{aligned}$$

10.

10.1.



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cos(\widehat{BAC}) = \sqrt{6} \times \sqrt{12} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$\text{Nota que: } \sqrt{\sqrt{6}^2 + \sqrt{6}^2} = \sqrt{6+6} = \sqrt{12}$$

Resposta correta: (D)

10.2.

Como sabemos que o volume da pirâmide é $4\sqrt{6}$ e $V \in VM$, calculemos $\|\vec{VM}\|$:

$$V_{\text{pir}} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}^2 \times \|\vec{VM}\|}{3} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \|\vec{VM}\| = 2\sqrt{6}$$

Uma equação vetorial da reta VM é: $(x, y, z) = (2, -1, 3) + k(2, -1, 1), k \in \mathbb{R}$, pelo que um ponto genérico desta reta é da forma $(2 + 2k, -1 - k, 3 + k)$.

Assim,

$$\vec{VM} = (2, -1, 3) - (2 + 2k, -1 - k, 3 + k) = (2 - 2 - 2k, -1 + 1 + k, 3 - 3 - k) = (-2k, k, -k)$$

$$\text{Logo, } \|\vec{VM}\| = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 4k^2 + k^2 + k^2 = 24 \Leftrightarrow k^2 = 4$$

Como a abcissa de V é positiva, $k = 2$ e $V(6, -3, 5)$.

10.3.

Tendo em conta as condições do problema, poderemos pintar as cinco faces da pirâmide com 4 ou com 5 cores.

Se considerarmos pintar com quatro cores, existem 6C_4 maneiras de escolher quatro das seis cores disponíveis para pintar as faces da pirâmide e para cada uma das maneiras consideradas, existem duas maneiras de escolher as faces opostas, faces sem arestas em comum e como tal têm que ser pintadas com cores iguais.

Por sua vez depois de considerarmos as $2 \square {}^6C_4$ maneiras de pintarmos as faces, temos de ter em conta que são quatro cores e como tal há, para cada uma das $2 \square {}^6C_4$ maneiras, 4! escolhas possíveis.

Se considerarmos pintar com cinco cores, existem 6A_5 maneiras de pintar as faces com as cinco das seis cores disponíveis, trata-se de considerar todas as sequências de cinco elementos (cores escolhidas e faces a pintar) que é possível formar com um conjunto com seis elementos (cores disponíveis).

11.

11.1.

Para estudar a função g , no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão, determinemos a segunda derivada da função.

Sabendo que $g'(x) = \cos(3x) + \frac{3}{2}x + 1$, temos:

$$g''(x) = \left(\cos(3x) + \frac{3}{2}x + 1\right)' = -3\text{sen}(3x) + \frac{3}{2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -3\text{sen}(3x) + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -3\text{sen}(3x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{sen}(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, então $x = \frac{\pi}{18} \vee x = \frac{5\pi}{18}$.

Podemos construir a tabela:

	0		$\frac{\pi}{18}$		$\frac{5\pi}{18}$		$\frac{\pi}{2}$
Sinal de g'	n. d.	+	0	-	0	+	n. d.
Concavidades do gráfico de g	n. d.	∪	$g\left(\frac{\pi}{18}\right)$	∩	$g\left(\frac{5\pi}{18}\right)$	∪	n. d.

Concluimos, pela análise da tabela que:

O gráfico da função g tem a concavidade voltada para cima em $]0, \frac{\pi}{18}[$ e em $]\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}[$ e a concavidade voltada para baixo em $]\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}[$.

As abscissas dos pontos de inflexão do gráfico da função g são: $\frac{\pi}{18}$ e $\frac{5\pi}{18}$.

11.2.

Como a reta r é tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa 0, o seu declive é igual a $g'(0)$.

Assim, temos:

$$m_r = g'(0) = \cos(0) + \frac{3}{2} \times 0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Como a reta s é perpendicular à reta r , então o declive de s é:

$$m_s = -\frac{1}{2}$$

Logo a reta s é definida por uma equação reduzida da forma:

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Sabe-se ainda que a reta s intersecta os eixos Ox e Oy nos pontos A e B , que terão de coordenadas $(a, 0)$ e $(0, b)$, em que b é a ordenada na origem da reta s .

E como o ponto A pertence à reta s , temos;

$$0 = -\frac{1}{2}a + b \Leftrightarrow \frac{1}{2}a = b \Leftrightarrow a = 2b, \text{ com } a \text{ e } b \text{ positivos.}$$

Como o triângulo $[OAB]$ tem área igual a 12, tem-se que $\frac{a \times b}{2} = 12$

Logo:

$$\begin{cases} a = 2b \\ \frac{a \times b}{2} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a \times b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2b \times b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2b^2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ b^2 = 12 \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ (b > 0) \end{matrix} \begin{cases} a = 2b \\ b = \sqrt{12} \end{cases} \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ (a > 0) \end{matrix} \begin{cases} a = 4\sqrt{3} \\ b = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

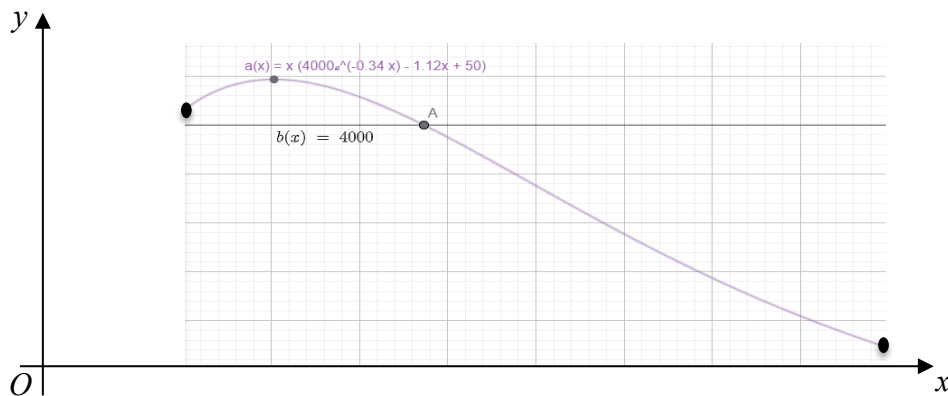
Conclui-se assim que a abcissa do ponto A é $4\sqrt{3}$.

12.

Comecemos por verificar que o valor obtido, em centenas de euros, com a venda de p bicicletas é dada por:

$$p \times N(p) = p \times (4000 \times e^{-0,34p} - 1,12p + 50), \text{ com } 2 \leq p \leq 10$$

Introduzindo esta expressão na calculadora e a reta de equação $y = 4000$, na janela de visualização, $[2, 10] \times [1500, 5000]$, por exemplo, obtém-se a seguinte representação gráfica:



Sendo $A(4,73; 4000)$, conclui-se que o preço de cada bicicleta é de 473€.

13.

As áreas (A_n) das quatro primeiras composições geométricas da construção do Tapete de Sierpinski, assumindo que a área do primeiro quadrado é 9, pode ser dada por:

$$A_1 = 9$$

$$A_2 = 9 - \frac{1}{9} \times 9 = 9 - 1$$

$$A_3 = 9 - \frac{1}{9} \times 9 - \frac{1}{9^2} \times 9 \times 8 = 9 - 1 - \frac{8}{9}$$

$$A_4 = 9 - \frac{1}{9} \times 9 - \frac{1}{9^2} \times 9 \times 8 - \frac{1}{9^3} \times 9 \times 8^2 = 9 - 1 - \frac{8}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

Generalizando, obtém-se, para as primeiras n composições geométricas da construção do Tapete de Sierpinski, assumindo que a área do primeiro quadrado é 9:

$$\begin{aligned} A_n &= 9 - 1 - \frac{8}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 - \dots - \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2} = 9 - \left(1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2}\right) = 9 - 1 \times \frac{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{8}{9}} = \\ &= 9 - 9 \times \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}\right) = 9 - 9 + 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Para obter o resultado pretendido basta substituir n por 50, isto é, $A_{50} = 9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{49} \approx 0,028$.

14.

Sabe-se que $a \in \mathbb{R}^+$, $D_h = [0, a]$ e $CD_h = [0, a]$.

Pretende-se provar que existe solução para a equação $h(x) = x$, em $[0, a]$.

(1) Note-se que se $h(0) = 0$ ou $h(a) = a$, tem-se que os pontos de abcissa 0 ou a satisfazem o pretendido.

(2) Considere-se a função p definida por $p(x) = h(x) - x$ tal que $h(0) \neq 0$ e $h(a) \neq a$, definida em $[0, a]$.

Tem-se que p é contínua em $[0, a]$ por ser definida por uma diferença de duas funções contínuas em $[0, a]$.

Por outro lado,

$p(0) = h(0) - 0 = h(0) > 0$, pois $CD_h = [0, a]$ e $h(0) \neq 0$ e

$p(a) = h(a) - a < 0$, pois $0 \leq h(a) \leq a$ e $h(a) \neq a$

Donde se conclui que: $p(a) < 0 < p(0)$

Por teorema de Bolzano-Cauchy, tem-se que $\exists c \in]0, a[: p(c) = 0$, isto é, existe pelo menos um ponto, de abcissa em $]0, a[$, do gráfico de h que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.

Por (1) e (2), conclui-se que existe, pelo menos, um ponto do gráfico da função h que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.